



دفترچه سؤالات به همراه پاسفنامه تشریحی مرحله اول بیست و هفتمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۸

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مسئله‌های کوتاه	چند گزینه‌ای
۲۷۰	-	۳۰

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

۱. کد برگه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سؤالات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
۵. در سوال‌های چهار گزینه‌ای به هر پاسخ درست ۳ نمره مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره منفی تعلق می‌گیرد. در مسئله‌های کوتاه به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.
۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.
۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.

۱- ارقام ستاره‌دار در حاصل ضرب روبه‌رو نامعلوم‌اند و لزوماً برابر نیستند. مجموع ارقام حاصل ضرب چقدر است؟ (اعداد کوچک سطر بالا از ده بر یک حاصل شده‌اند.)

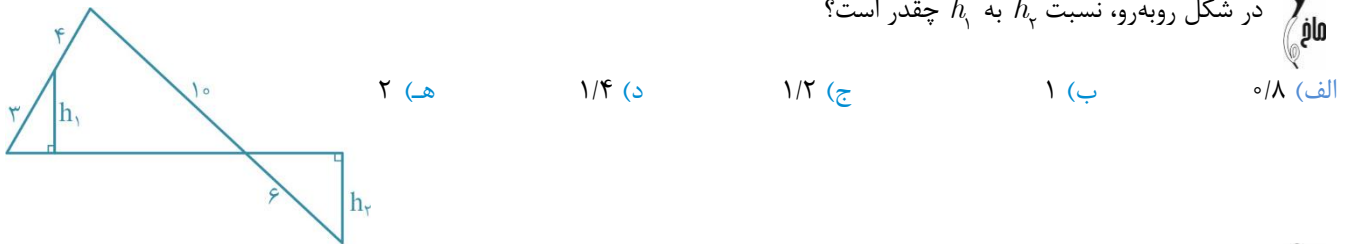
الف) ۵ (ب) ۹ (ج) ۱۸ (د) ۲۷ (ه) ۳۶
 * * * *
 × ۹

 ۱ * . * *

۲- چند سه تایی (a, b, c) از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک‌ترین مضرب مشترک a, b و c برابر ۷۰۰۰ باشد؟

الف) ۱۰۰۸ (ب) ۲۱۸۷ (ج) ۵۱۰۳ (د) ۵۴۸۸ (ه) ۹۵۸۳

۳- در شکل روبه‌رو، نسبت h_1 به h_2 چقدر است؟



الف) ۰/۸ (ب) ۱ (ج) ۱/۲ (د) ۱/۴ (ه) ۲

۴- طول سه میانه مثلثی، ۵، ۵ و ۸ سانتی‌متر است. کوتاه‌ترین ضلع مثلث چند سانتی‌متر است؟

الف) ۲ (ب) $3\sqrt{7}$ (ج) $\frac{\sqrt{189}}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$ (ه) ۴

۵- در بسط $(1 + x^3 + x^6)^{50}$ چند جمله با ضریب ناصفر وجود دارد؟

الف) ۵۱ (ب) ۱۰۱ (ج) ۱۵۱ (د) ۲۰۱ (ه) ۳۰۱

۶- تعداد مقسوم‌علیه‌های $(1387! + 1430) \times 2008$ چند برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های $1387! + 1430$ است؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۸ (د) ۱۰ (ه) ۲۰۰

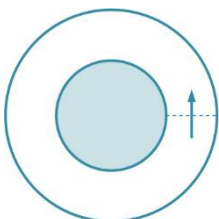
۷- چند عدد پنج رقمی با ارقام ۱ تا ۵ وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و مجموع رقم اول و رقم پنجم آن با مجموع رقم دوم و رقم چهارم آن برابر باشد؟

الف) ۸ (ب) ۱۲ (ج) ۱۶ (د) ۲۴ (ه) ۳۶

۸- ده نفر، با شماره‌های یک تا ده، به ترتیب در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور میزی نشسته‌اند. در ابتدا هر کس ۱۰۰ مهره دارد. با شروع از نفر شماره یک، هر نفر ۲ مهره از نفر سمت راست خود می‌گیرد و ۱ مهره به نفر سمت چپ خود می‌دهد و نوبت به نفر سمت چپ منتقل می‌شود. پس از انجام ۸۷ مرحله، نفر هشتم چند مهره خواهد داشت؟

الف) ۹۸ (ب) ۹۹ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۰۱ (ه) ۱۰۲

۹- در پیست دایره‌ای روبه‌رو، دوندگان روی دایره‌های متحدالمرکز می‌دوند. خط شروع مسابقه و جهت حرکت در شکل مشخص شده است. نقطه پایان مسابقه روی کدام یک از خم‌های زیر باشد تا طول مسیری که دوندگان مختلف تا رسیدن به خط پایان طی می‌کنند، با هم برابر باشد؟



۱۰- برای دو عدد مثبت a و b ، M و G را به ترتیب میانگین حسابی $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ و میانگین هندسی (\sqrt{ab}) در نظر می‌گیریم. کوچک‌ترین عدد k را بیابید که نابرابری زیر برای هر a و b حقیقی مثبت برقرار باشد.

$$|M - G| \leq k|a - b|$$

- الف) $\frac{1}{6}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{2}$ ه) ۱

۱۱- کاغذی مربع شکل را از روی قطر آن تا می‌کنیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به دست آید. سپس مثلث را از روی محور تقارن آن تا می‌کنیم و مثلث دیگری به دست می‌آوریم و این کار را ۱۱ بار انجام می‌دهیم. سپس دو گوشه غیرقائمه مثلث حاصل را می‌بریم. اکنون اگر کاغذ را باز کنیم، چند سوراخ در آن می‌بینیم؟ (توجه کنید که در مجموع، ۱۲ بار عمل تا کردن انجام شده است.)

- الف) ۸۴۱ ب) ۹۰۰ ج) ۹۶۱ د) ۱۰۲۴ ه) ۱۰۸۹

۱۲- هرمی مربع‌القاعده در نظر بگیرید که وجوه جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ هستند. طول ضلع بزرگ‌ترین مکعبی که در این هرم جا می‌شود چقدر است؟

- الف) $1 - \sqrt{2}$ ب) $2 - \sqrt{3}$ ج) $3 - 2\sqrt{3}$ د) $1 - \sqrt{3}$ ه) $2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

۱۳- دو ماتریس A و B را هم‌توان گوئیم اگر اعداد طبیعی m و n وجود داشته باشند که $A^m = B^n$. کدام گزینه نادرست است؟

الف) اگر A و B هم‌توان و C هم‌توان باشند، آن‌گاه A و C نیز هم‌توان‌اند.

ب) اگر A و I هم‌توان باشند، آن‌گاه A وارون‌پذیر است.

- ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ هم‌توان‌اند. د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هم‌توان‌اند. ه) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ هم‌توان‌اند.

۱۴- چند سه‌تایی (a, b, c) از اعداد تک‌رقمی ناصفر وجود دارد که $b \neq c$ و مجموعه ارقام دو عدد $a \times b$ و $a \times c$ یک‌سان باشند؟

- الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۱۲

۱۵- شانزده نقطه در یک شبکه مربعی 4×4 قرار گرفته‌اند. از این نقاط حداکثر چند نقطه می‌توان انتخاب کرد که هیچ سه‌تایی هم‌خط نباشند؟

- الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۱۶- چرخ‌ی به شعاع یک متر در ابتدای پلکانی قرار دارد که ارتفاع هر پله آن نیم‌متر و طول هر پله آن ۲ متر است. وقتی چرخ از دو پله بالا رفت، در ابتدای پله، چند رادیان چرخیده است؟

الف) ۵

ب) $2 + \pi$

ج) $2 + \frac{4}{3}\pi$

د) $2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

ه) $4 - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$



۱۷- ماف

الف) ۰ (ب) ۵ (ج) ۹ (د) ۱۱ (ه) ۱۶

مجموعه معادله روبه‌رو است. x_5 چند است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_7 = 2x_7 \\ x_7 + x_8 = 2x_8 \\ x_8 + x_{10} = 2x_{10} \\ x_9 + x_1 = 22 \\ x_{10} + x_7 = 26 \end{cases}$$

۱۸- ماف

الف) ۱۲۹۶ (ب) ۴۰۹۶ (ج) ۱۴۴۰۰ (د) ۱۶۴۰۰ (ه) ۲۴۳۸۴

یک جدول 8×8 که هر خانه آن مربعی به ضلع یک است در نظر بگیرید. مجموع مساحت همه مستطیل‌هایی که اضلاع آن‌ها در این جدول دیده می‌شود چند است؟

۱۹- ماف

الف) ۶۸۱ (ب) ۸۸۱ (ج) ۴۸۱ (د) ۲۲۱ (ه) ۳۸۱

سه رقم سمت راست 21^{64} کدام است؟

۲۰- ماف

الف) ۶ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۲ (ه) ۲۰

جسمی سه بعدی را بر روی صفحات $x - y$ و $y - z$ تصویر کرده‌ایم و دو شکل روبه‌رو به دست آمده است. حداکثر حجمی که جسم سه بعدی می‌تواند داشته باشد، چقدر است؟



۲۱- ماف

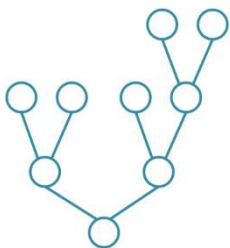
الف) نمودار یک تابع پوشا است. (ب) نمودار یک تابع یک‌به‌یک است. (ج) نمودار یک تابع صعودی است. (د) نمودار یک تابع نزولی است. (ه) نمودار یک تابع نیست.

نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به خط $y + 5x = 0$ قرینه می‌کنیم. در مورد شکل حاصل کدام درست است؟

۲۲- ماف

الف) $2^0 + 2^0$ (ب) $2^0 + 12$ (ج) $2^0 + 8$ (د) $2^0 + 4$ (ه) 2^{100}

مجموع ارقام کدام یک از اعداد زیر بیشتر است؟



۲۳- ماف

الف) ۱۶ (ب) ۹۶ (ج) ۴۴۸ (د) ۸۹۶ (ه) ۳۶۲۸۸۰

به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را، بدون تکرار، در دایره‌های شکل روبه‌رو قرار داد به طوری که عدد هر دایره از دو عددی که در بالای آن قرار دارد کمتر باشد؟

۲۴- ماف

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۴ (ه) بی‌نهایت

معادله $2^{b-a} + a = b^2$ در اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

۲۵- ماف

الف) ۱ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) ۲ (د) $\frac{2}{3}$ (ه) $\frac{7}{10}$

مثلث به رأس‌های A, B, C دارای این خاصیت است که فواصل رأس‌های آن تا نقطه ثابت P ، به ترتیب، برابر با ۷، ۱۰ و ۱۴ است و در بین مثلث‌های با این خاصیت، بیشترین مساحت را دارد. نسبت فاصله P از ضلع AB به فاصله P از ضلع BC ، چقدر است؟

۲۶- x و y و z جواب دستگاه معادله روبه‌رو در بازه $(-\pi, \pi]$ هستند. $x^2 + y^2 + z^2$ کدام گزینه است؟

الف) ۰

ب) $\frac{\pi^2}{4}$ (ج) $\frac{3\pi^2}{4}$ (د) $\frac{8\pi^2}{9}$ (ه) $\frac{27\pi^2}{4}$

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 0 \\ \cos x + \cos y + \cos z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

۲۷- زیرمجموعه‌های A_1, A_2, A_3, \dots از اعداد طبیعی به صورت روبه‌رو تعریف شده‌اند. کدام یک از اعداد زیر عضو A_1 نیست؟ (توجه کنید که $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$)

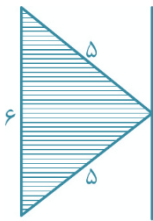
الف) ۶۹ (ب) ۷۰ (ج) ۷۱ (د) ۷۲ (ه) ۷۳

$$\begin{cases} A_1 = \emptyset, A_1 = \{1\} \\ A_n = (A_{n-1} \Delta A_{n-2}) \cup \{n\} \end{cases}$$

۲۸- چراغ قوه‌ای داریم که به دو باتری نیاز دارد. پنج باتری در اختیار داریم که دقیقاً سه تای آن‌ها سالم است. با دست کم چند بار امتحان کردن می‌توانیم حتماً چراغ‌قوه را روشن کنیم؟ (آخرین باری که چراغ‌قوه روشن می‌شود نیز یک بار امتحان کردن محسوب می‌شود.)

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

۲۹- مثلث متساوی‌الساقینی با قاعده ۶ و طول ساق‌های ۵ را حول محوری که از رأس آن می‌گذرد و موازی قاعده آن است دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چقدر است؟



الف) 12π (ب) 48π (ج) 64π (د) 72π (ه) 96π

۳۰- در یک جدول با ۷۲ سطر و ۱۴۰ ستون، مهره‌ای با این قاعده حرکت می‌کند که در هر حرکت ۳۰ واحد به سمت راست و ۲۰ واحد به سمت بالا می‌رود و وقتی به ضلع راست یا ضلع بالای جدول می‌رسد، حرکت را از ضلع مقابل ادامه می‌دهد. مثلاً اگر مهره در خانه ۱۲۰ افقی و ۷۰ عمودی باشد در حرکت بعد به خانه ۱۰ افقی و ۱۸ عمودی می‌رود. اگر این مهره از خانه گوشه پایین سمت چپ (۱ افقی و ۱ عمودی) شروع به حرکت کند، به چه نسبتی از خانه‌های جدول می‌تواند برسد؟

الف) $\frac{1}{80}$ (ب) $\frac{1}{40}$ (ج) $\frac{1}{30}$ (د) $\frac{1}{20}$ (ه) $\frac{5}{12}$

کلید سوالات

۱	هـ د ج ب الف	۲۱	هـ د ج ب	۴۱	هـ د ج ب الف
۲	هـ د ج ب الف	۲۲	هـ د ج الف	۴۲	هـ د ج ب الف
۳	هـ د ج ب الف	۲۳	هـ د ج ب الف	۴۳	هـ د ج ب الف
۴	هـ د ج ب الف	۲۴	هـ د ب الف	۴۴	هـ د ج ب الف
۵	هـ د ج الف	۲۵	هـ د ج الف	۴۵	هـ د ج ب الف
۶	هـ د ج الف	۲۶	هـ د ج ب الف	۴۶	هـ د ج ب الف
۷	هـ د ج ب الف	۲۷	هـ د ج ب الف	۴۷	هـ د ج ب الف
۸	هـ د ج ب الف	۲۸	هـ د ج ب الف	۴۸	هـ د ج ب الف
۹	هـ د ج ب الف	۲۹	هـ د ج ب الف	۴۹	هـ د ج ب الف
۱۰	هـ د ج ب الف	۳۰	هـ د ج ب الف	۵۰	هـ د ج ب الف
۱۱	هـ د ج ب الف	۳۱	هـ د ج ب الف	۵۱	هـ د ج ب الف
۱۲	هـ د ج ب الف	۳۲	هـ د ج ب الف	۵۲	هـ د ج ب الف
۱۳	هـ د ج ب الف	۳۳	هـ د ج ب الف	۵۳	هـ د ج ب الف
۱۴	هـ د ج ب الف	۳۴	هـ د ج ب الف	۵۴	هـ د ج ب الف
۱۵	هـ د ب الف	۳۵	هـ د ج ب الف	۵۵	هـ د ج ب الف
۱۶	هـ د ج ب الف	۳۶	هـ د ج ب الف	۵۶	هـ د ج ب الف
۱۷	هـ د ج ب الف	۳۷	هـ د ج ب الف	۵۷	هـ د ج ب الف
۱۸	هـ د ج ب الف	۳۸	هـ د ج ب الف	۵۸	هـ د ج ب الف
۱۹	هـ د ج ب الف	۳۹	هـ د ج ب الف	۵۹	هـ د ج ب الف
۲۰	هـ د ج ب الف	۴۰	هـ د ج ب الف	۶۰	هـ د ج ب الف

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۷

گزینه‌ی [ب] صحیح است.



-۱

حاصل ضرب اولین ستاره‌ی بالا در عدد ۹، رقم دهگان ۸ دارد و لذا این ستاره تنها می‌تواند ۹ باشد و $9 \times 9 = 81$ ، پس اولین ستاره‌ی پایین رقم ۱ است. حاصل ضرب دومین ستاره‌ی بالا در ۹ به اضافه‌ی ۸ رقم دهگان ۲ دارد پس تنها ۲ می‌تواند باشد. در نتیجه دومین ستاره‌ی پایین ۶ است. حاصل ضرب سومین ستاره‌ی بالا در ۹، ۲۰ است پس سومین ستاره‌ی بالا برابر ۲ است و در نهایت آخرین ستاره‌ی بالا ضرب در ۹ به اضافه‌ی ۲، دهگان ۱ دارد پس ۱ است. در نتیجه آخرین ستاره‌ی پایین برابر یکان حاصل زیر یعنی ۱ است $2 + 9 \times 1 = 11$. در نتیجه حاصل ضرب برابر 11061 است که مجموع ارقامش برابر ۹ می‌باشد.

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.



-۲

7000 یک عامل ۷ دارد، پس حداقل یکی از این اعداد یک عامل ۷ باید داشته باشد پس هر کدام از آنها ۲ حالت دارد (یا ۷ دارد و یا ندارد). البته حالتی که هیچ کدام ۷ نداشته باشند پذیرفته نیست. در نتیجه به $1 - 3^3$ طریق تعداد عوامل ۷ تعیین می‌گردد. 7000 سه عامل ۵ و ۲ دارد پس حداقل یکی از این اعداد سه عامل ۵ و ۲ دارد و حالتی که همه‌ی آنها کم‌تر از ۳ عامل ۲ و ۵ داشته باشند قابل قبول نیست و در نتیجه به $3^3 - 4^3 = 37$ طریق تعداد عوامل ۲ و ۵ تعیین می‌گردد. بنابراین در کل تعداد حالت‌های ممکن برای چنین سه‌تایی‌هایی برابر $37 \times 37 \times 7 = 9583$ است.

گزینه‌ی [د] صحیح است.



-۳

ارتفاع مثلث بزرگتر را رسم می‌کنیم و h_p می‌نامیم. نسبت h_1 به h_p طبق قضیه‌ی تالس ۳ به ۷ است. دوماثل متحدرأس با هم متشابه هستند پس نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت اضلاع می‌باشد. بنابراین نسبت h_p به h_1 برابر 10° به 6° است، و لذا نسبت به h_p به h_1 برابر ۷ به ۵ یعنی $1/4$ است.

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.



-۴

چون مثلث دو میانه‌ی برابر دارد، پس مثلث متساوی‌الساقین است و میانه به طول ۸ که ارتفاع آن نیز هست بر ضلع کوچکتر وارد شده است. فرض کنید G مرکز ثقل مثلث و A ، B و C سه رأس مثلث به ترتیب متناظر با میانه‌های به طول ۸، ۵ و ۵ و M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد. از آنجایی که مرکز ثقل میانه‌ها را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، پس $GM = \frac{8}{3}$ و $GB = \frac{10}{3}$ چون GM عمود بر BC

$$\text{است، طبق قضیه‌ی فیثاغورس } MB^2 = GB^2 - GM^2 = \frac{100}{9} - \frac{64}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\text{پس } MB = 2 \text{ و } BC = 4$$

گزینه‌ی [ب] صحیح است.



-۵

ابتدا به جای x^2 در این عبارت y را جای‌گذاری می‌کنیم و عبارت به صورت $(1 + y + y^2)^5$ در می‌آید که حاصل این عبارت از جمله‌های به صورت y^0, y^1, \dots, y^5 تشکیل شده است که هیچ کدام ضریب صفر ندارند زیرا تمام جملات عبارت اولیه مثبت هستند، پس 101 جمله با ضرایب ناصفر داریم.

گزینه‌ی [ب] صحیح است.

۶-

می‌توان نوشت $(\frac{1387!}{2} + 715) \times 251 \times 2^4 = 2008 \times (1387! + 1430)$ که $\frac{1387!}{2} + 715$ نسبت به ۲ و ۲۵۱ اول است. به

همین ترتیب $(\frac{1387!}{2} + 715) \times 2 = 1387! + 1430$. اگر $\frac{1387!}{2} + 715$ ، m مقسوم‌علیه داشته باشد، عبارت اول $m \times (1+1) \times (4+1) = 10m$ مقسوم‌علیه و عبارت دوم $m \times (1+1) = 2m$ مقسوم‌علیه خواهد داشت و بنابراین نسبت تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۵ است.

گزینه‌ی [د] صحیح است.

۷-

مجموع دو عدد متمایز بین ۱ تا ۵ اعداد بین ۳ تا ۹ می‌تواند باشد. دقت کنید که برای مجموع‌های ۹، ۸، ۳ و ۴ تنها یک حالت وجود دارد، به طور مثال برای ۴ تنها یک حالت وجود دارد $(3+1=4)$. اما برای عدد ۷ دو حالت وجود دارد $(6+1=7)$. برای جای‌گذاری چهاررقم در جای‌گاه‌های اول، دوم، چهارم و پنجم $2 \times 4 = 8$ حالت وجود دارد (چهار حالت برای رقم اول، دو حالت برای رقم دوم و تنها یک حالت برای رقم‌های چهارم و پنجم). از بین اعداد ۱ تا ۵ یک عدد باقی می‌ماند که در جای‌گاه سوم قرار می‌گیرد. بنابراین برای هر یک از مجموع‌ها ۸ حالت وجود دارد و در کل $3 \times 8 = 24$ عدد پنج رقمی می‌توان ساخت. (دقت کنید که برای سه مجموع ۵، ۶ و ۷ دو حالت وجود دارد که مجموع برابر آن عدد شود).

گزینه‌ی [د] صحیح است.

۸-

وقتی هر کدام از نفرات یک دور بازی خود را انجام دادند، هر نفر دو مهره به نفر سمت راستش داده و یک مهره از نفر سمت راستش و یک مهره‌ی دیگر از نفر دوم سمت راستش گرفته است، پس تعداد مهره‌های هیچ‌کس تغییر نکرده است. بنابراین بعد از ۸۰ مرحله بازی هم تعداد مهره‌های همه برابر ۱۰۰ می‌ماند. حال در هفت دور بازی باقی‌مانده، نفر هشتم تنها در بازی نفر هفتم دخیل می‌شود و از این بازی یکی از دو مهره‌های که نفر هفتم از نفر شماره‌ی شش می‌گیرد به او می‌رسد، پس نفر هشتم دارای ۱۰۱ مهره می‌شود.

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

۹-

دونده‌ای که به محیط دایره‌ی بزرگ‌تر نزدیک‌تر است، محیط بیش‌تر را طی می‌کند پس باید نقطه‌ی پایان نزدیک‌تری داشته باشد و دونده‌ای که به محیط دایره کوچک‌تر نزدیک‌تر است باید نقطه‌ی پایان دورتری داشته باشد.

گزینه‌ی [د] صحیح است.

۱۰-

$$M - G = \frac{1}{2}(a + b - 2\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

و با فرض $b \geq a$ خواهیم داشت:

$$|a - b| = b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$$

در نهایت $k \geq \frac{M - G}{b - a} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$ اگر $a = 0$ در نظر بگیریم $k \geq \frac{1}{2}$ ، در نتیجه کم‌ترین مقدار k حداقل $\frac{1}{2}$ است. ضمناً اگر k

برابر $\frac{1}{2}$ باشد، از آن‌جا که $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$ نامساوی را برقرار می‌کند. پس کم‌ترین مقدار ممکن برای k ، همان $\frac{1}{2}$ است.

گزینه‌ی [ج] صحیح است.



-۱۱

از جست‌وجوی الگو استفاده کنید. به جای تا کردن کاغذ خطوطی که از روی آن‌ها در هر مرحله کاغذ تا می‌شود را رسم کنید و به جای سوراخ کردن کاغذ جاهایی در کاغذ که سوراخ ایجاد می‌شوند را علامت بزنید. به این ترتیب، بعد از گذشت مرحله‌ی اول چهار نقطه‌ی گوشه‌ای کاغذ علامت خورده می‌شوند، با گذشت دو مرحله در مرحله‌ی سوم نقطه‌ی وسط هر ضلع و مرکز مربع هم علامت می‌خورند یعنی تعداد نقطه‌های علامت خورده به ۹ تا می‌رسد. با گذشت دو مرحله‌ی بعدی نقطه‌ی وسط هر ضلع و هم‌چنین مرکز چهار مرکز مربع کوچک مرحله‌ی سوم علامت می‌خورند. به همین ترتیب می‌توان حدس زد که در مرحله‌ی $2n + 1$ ام (یعنی در یک مرحله‌ی فرد)، k^2 نقطه‌ی علامت خورده داشته باشیم در مرحله‌ی فرد بعدی (مرحله‌ی $2n + 3$ ام) $(2k - 1)^2$ نقطه‌ی علامت خورده داریم. پس در مرحله‌ی ۱۱ ام $3^2 = 9$ نقطه‌ی علامت خورده خواهیم داشت که چون نقاط روی مرز مدنظر ما نیستند، تنها $3^2 - 4 = 5$ نقطه‌ی علامت خورده داریم. (اثبات این حدس هم می‌تواند به کمک استقرا انجام شود).



-۱۲

گزینه‌ی [د] صحیح است.



-۱۳

عبارت گزینه‌ی (درست است، زیرا اگر $A^m = B^n$ و $B^p = C^q$ ، آن‌گاه $A^{mp} = B^{np} = C^{qm}$ پس A و C نیز هم‌توانند. عبارت گزینه‌ی (ب) درست است، زیرا اگر $A^n = I^m = I$ در نتیجه اگر $n = 1$ که $A = I$ وارون‌پذیر است و اگر $n > 1$ ، $I = A^n = A \times A^{n-1}$ پس A^{n-1} وارون A و A وارون‌پذیر است.

عبارت گزینه‌ی (ج) درست است، زیرا

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عبارت گزینه‌ی (ه) درست است، زیرا

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2$$

بنابراین عبارت گزینه‌ی (د) غلط است. اگر ماتریسی با ماتریس همانی هم‌توان باشد باید عدد طبیعی n موجود باشد که وقتی آن ماتریس به توان n می‌رسد ماتریس همانی شود. اما می‌توان به راحتی دید که اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ به توان n برسد روی قطر آن اعداد ۱ و 2^n خواهند بود، پس هیچ توانی از این ماتریس برابر همانی نمی‌شود.

توضیح: می‌توان استدلال دیگری را نیز برای اشتباه بودن عبارت گزینه‌ی (د) به کمک دترمینان ارائه کرد. اگر $A^m = B^n$ (یعنی دو ماتریس

هم‌توان باشند) $\det(A)^m = \det(B)^n$. اما دترمینان ماتریس همانی یک است ولی دترمینان $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n$ برابر 2^n است. پس این دو ماتریس

هم‌توان نیستند.

-۱۴

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

۱، زیرا اگر a برابر ۱ باشد آن‌گاه $b=c$ که طبق فرض صورت سؤال درست نیست.

اگر $a \times b = \overline{xy}$ و $a \times c = \overline{yx}$ (دقت کنید که $x \neq y$ ، زیرا اگر این دو برابر باشند مجدداً b و c برابر خواهند شد.) آن‌گاه $a \times b + a \times c = 11x + 11y = 11(x + y)$ بنابراین $11 \mid a(b + c)$ و چون a یک رقمی است و نمی‌تواند بر ۱۱ بخش پذیر باشد، پس $11 \mid b + c$. با این توصیفات خواهیم داشت:

$$(b, c) \in (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)$$

از طرف دیگر $a(b - c) = a \times b - a \times c = 9(x - y)$ بنابراین $9 \mid a(b - c)$

حال روی حالت‌های مختلف a بحث می‌کنیم.

اگر $a = 9$ باشد تمامی حالت‌های بالا برای زوج (b, c) امکان دارند.

اگر $a = 3$ یا $a = 6$ آن‌گاه باید $b - c$ بر ۳ بخش پذیر شود که بین حالت‌های بالا تنها $(4, 7)$ و $(7, 4)$ این خاصیت را دارند.

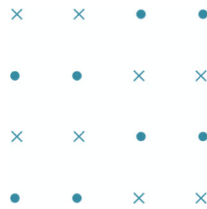
و در بقیه حالات باید $9 \mid b - c$ که هیچ b و c تک‌رقمی نابرابر چنین شرایطی ندارند. بنابراین کل حالات ۱۲ تا می‌شود.

-۱۵

گزینه‌ی [ج] صحیح است.

دقت کنید که اگر از یک سطر بیش از دو نقطه انتخاب کنیم، قطعاً سه نقطه‌ی هم‌خط یافت می‌شوند و بنابراین تعداد نقطه‌ها نمی‌تواند از ۸ تا

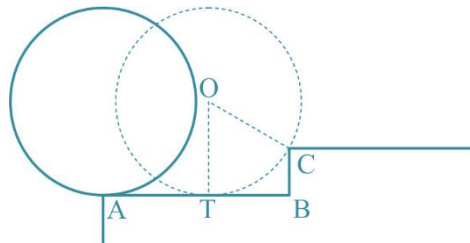
بیش‌تر باشد. برای ۸ نقطه هم اگر نقاطی که در شکل زیر با \times مشخص شده‌اند را انتخاب کنیم، خاصیت مسئله را دارا هستند.



-۱۶

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

ابتدا چرخ شروع به غلطیدن روی پله‌ی اول می‌کند تا نقطه‌ای از آن به پله‌ی دوم برخورد کند. (شکل زیر)



در این صورت زاویه‌ای که چرخ به رادیان می‌چرخد، برابر طول AT تقسیم بر شعاع دایره است. زیرا طول یک کمان از دایره برابر زاویه‌ی آن به رادیان در شعاع دایره است و در این جا طول کمانی که یک نقطه‌ای از دایره می‌چرخد برابر طول AT است.

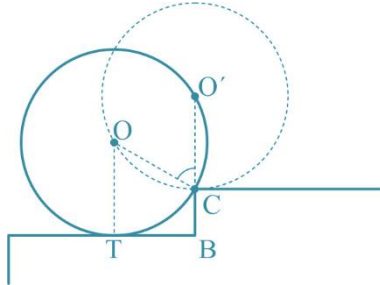
حال دقت کنید که $AT = AB - BT = 2 - BT$. پس کافی است طول BT را پیدا کنیم.

$$BT^2 = OC^2 - (OT - CB)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow BT = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AT = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

دقت کنید که چون شعاع دایره یک است، زاویه‌ی طی شده هم برابر همین مقدار $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

حال چرخ حول نقطه‌ی C باید بچرخد تا به پله‌ی بالاتر منتقل شود. مقدار این چرخش برابر زاویه‌ی $\angle OCO'$ است.

$$\sin(\angle OCO') = \frac{BT}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle OCO' = \frac{\pi}{3}$$



این فرایند باید یک بار دیگر برای پله‌ی دوم هم انجام شود. پس چرخ در مجموع $2(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}) = 4 - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$ زاویه می‌چرخد.

گزینه‌ی [د] صحیح است.



-۱۷

از هشت رابطه‌ی اول نتیجه می‌شود:

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_{10} - x_9$$

این مقدار مشترک را d می‌نامیم. پس $x_n = x_1 + (n-1)d$

$$x_9 + x_1 = 2x_5 + 8d = 22 \Rightarrow x_5 = x_1 + 4d = 11$$

توضیح: با راه‌حلی که ارائه شد، به رابطه‌ی آخر صورت سؤال نیازی نیست. اما به کمک این رابطه و رابطه‌ای که در بالا داریم می‌توان مقدار x_1 و d را به تنهایی محاسبه کرد. کاری که در راه‌حل بالا انجام نشد.

گزینه‌ی [ج] صحیح است.



-۱۸

اگر $m, n \leq 8$ تعداد مستطیل‌های به طول m و عرض n این‌گونه تعیین می‌گردد که از ضلع عمودی مستطیل 8×8 دو سطر که فاصله‌ی آن‌ها به اندازه‌ی m باشد و از ضلع افقی دو ستون که فاصله‌ی آن‌ها از یک دیگر به اندازه‌ی n باشد انتخاب می‌کنیم که به ترتیب $m-1$ و $n-1$ حالت دارد. پس تعداد مستطیل‌ها با این ابعاد برابر $(9-m)(9-n)$ و مساحت هر کدام نیز برابر mn است پس مجموع مساحت کل این مستطیل‌ها برابر است با:

$$\sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 (9-m)(9-n)mn = 81 \left(\sum_{m=1}^8 m \right)^2 - 18 \left(\sum_{m=1}^8 m \right) \left(\sum_{m=1}^8 m^2 \right) + \left(\sum_{m=1}^8 m^2 \right)^2$$

$$= 81 \times 36^2 - 18 \times 36 \times 204 + 204^2 = 104976 - 132192 + 41616 = 14400$$

گزینه‌ی [الف] صحیح است.



-۱۹

برای به دست آوردن سه رقم سمت راست، باقی‌مانده‌ی این عدد در تقسیم بر ۱۰۰۰ را به دست می‌آوریم.

$$21^{64} = (20+1)^{64} = \sum_{i=0}^{64} \binom{64}{i} 20^i = 1 + 64 \times 20 + \frac{64 \times 63}{2} \times 20^2 + 20^3 (\dots) = 807681 + 20^3 (\dots)$$

راست برابر ۶۸۱ است.

گزینه‌ی [ب] صحیح است.

-۲۰

اگر تصویر بر روی صفحه‌ی $X-Y$ شکل سمت چپ باشد، جسم می‌تواند از لایه‌های ۵ تایی که روی سایه‌هایشان قرار گرفته‌اند تشکیل شده باشد، اما چون جسم بر روی صفحه‌ی عمود بر این صفحه به صورت شکل ۲ است. بنابراین باید ۲ لایه باشد که لایه‌ی اول از ۵ و لایه‌ی دوم از ۳ مکعب 1×1 تشکیل شده است که در مجموع ۸ مکعب می‌شوند.

گزینه‌ی [الف] صحیح است.

-۲۱

لم اول. قرینه‌ی نقطه‌ی (a, b) نسبت به خط $y + \Delta x = 0$ ، نقطه‌ی $(a, b) - 2(\Delta, 1) \frac{\Delta a + b}{26}$ خواهد بود.

روند اثبات. ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از نقطه (a, b) و عمود بر خط $y + \Delta x = 0$ را می‌یابیم. قرینه‌ی نقطه (a, b) نسبت به محل برخورد این دو خط همان نقطه‌ی مورد نظر خواهد بود.

بنابر لم بالا، قرینه‌ی نقطه $(a, 0)$ نسبت به این خط نقطه‌ی $(-\frac{24}{26}a, -\frac{10}{26}a)$ است و لذا قرینه‌ی خط $y = 0$ نسبت به این خط،

$y = \frac{10}{24}x$ خواهد بود. حال دقت کنید که خط $y = \frac{10}{24}x$ ، نمودار تابع $y = x^3$ را در سه نقطه قطع می‌کند و بنابراین قرینه‌ی این

نمودار نسبت به $y + \Delta x = 0$ و خط $y = 0$ در سه نقطه متقاطع هستند. لذا اگر قرینه‌ی این نمودار، خود نمودار تابع باشد، تابع جدید نمی‌تواند یک به یک و صعودی یا نزولی باشد.

از طرفی دیگر برای هر عدد حقیقی k' ، معادله‌ی $x^3 = \frac{10}{24}x + k'$ جواب حقیقی دارد. این یعنی تمام خطوط به شکل $y = \frac{10}{24}x + k'$

و منحنی $y = x^3$ متقاطع هستند. بنابراین قرینه‌ی نمودار $y = x^3$ هر خط افقی را در حداقل یک نقطه قطع می‌کند و این یعنی قرینه‌ی این نمودار اگر تابع باشد، تابعی پوشا است.

با استدلالی شبیه به آنچه در بالا آورده شد قرینه‌ی خط $x = 0$ نسبت به خط $y + \Delta x = 0$ ، خط $y = -\frac{24}{10}x$ است. با توجه به

نکته‌ای که در بالا توضیح داده شد، قرینه‌ی خطوط به شکل $x = k$ به صورت $y = -\frac{24}{10}x + k'$ در می‌آیند. حال برای اینکه نشان

دهیم قرینه‌ی نمودار $y = x^3$ خود نمودار یک تابع است، ادعا می‌کنیم قرینه‌ی این نمودار هر خط به صورت $x = k$ را دقیقاً یک نقطه قطع

می‌کند. به طور معادل بعد از قرینه کردن نسبت به خط $y + \Delta x = 0$ ، نمودار $y = x^3$ هر خط به صورت $y = -\frac{24}{10}x + k'$ را دقیقاً

در یک نقطه قطع می‌کند و این هم یعنی معادله‌ی $x^3 + \frac{24}{10}x - k' = 0$ برای هر عدد حقیقی k' دقیقاً یک جواب حقیقی دارد. اولاً دقت

کنید که این معادله‌ی درجه سه است که حداقل یک جواب حقیقی دارد. ثانیاً می‌توان به صورت زیر نشان داد تابع

$P(x) = x^3 + \frac{24}{10}x - k'$ یک به یک است و بنابراین این معادله تنها یک جواب می‌تواند داشته باشد.

$$P(x_1) = P(x_2) \Rightarrow x_1^3 + \frac{24}{10}x_1 - k' = x_2^3 + \frac{24}{10}x_2 - k'$$

$$\Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + \frac{24}{10}x_1 - \frac{24}{10}x_2 = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \frac{24}{10}) = 0$$

اما $0 < \frac{24}{10} + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + \frac{24}{10}$ پس $x_1 = x_2$ و لذا $P(x)$ یک به یک است.

گزینه‌ی [ب] صحیح است.

-۲۲

دو رقم سمت راست $۲^{۱۰۰}$ را به وسیله‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
 ۲^{۱۰۰} &\equiv ۱۰۲۴^{۱۰} \equiv ۲۴^{۱۰} \equiv (۲۰ + ۴)^{۱۰} \equiv ۴^{۱۰} + ۲۰ \times ۴^۹ \times \binom{۱۰}{۱} + ۴۰۰(\dots) \\
 &\equiv ۲^۲ \equiv ۱۰۲۴^۲ \equiv ۲۴^۲ \equiv ۵۷۶ \equiv ۷۶
 \end{aligned}$$

(که منظور از \equiv ، هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ است.)

حال با توجه به این که دو رقم سمت راست ۷۶ است، جمع کردن $۲^{۱۰۰}$ با اعداد حاضر در گزینه‌های سؤال در ارقام سوم به بعد $۲^{۱۰۰}$ تأثیری ندارد، پس باید مجموع دو رقم سمت راست گزینه‌ها را بیابیم.

مجموع دو رقم سمت راست	دو رقم سمت راست	
۱۵	۹۶	گزینه‌ی (الف)
۱۶	۸۸	گزینه‌ی (ب)
۱۲	۸۴	گزینه‌ی (ج)
۸	۸۰	گزینه‌ی (د)
۱۴	۷۶	گزینه‌ی (ه)

پس بیش‌ترین مجموع ارقام مربوط به گزینه‌ی (ب) است.

گزینه‌ی [د] صحیح است.

-۲۳

اولاً واضح است که ۱ باید در پایین‌ترین خانه قرار بگیرد. حال از بین ۸ عدد باقی‌مانده، ۳ عدد را به $\binom{۸}{۳} = ۵۶$ برای سه جای‌گاه سمت

چپ انتخاب می‌کنیم. کوچک‌ترین عدد بین این سه عدد باید در پایین‌ترین خانه قرار بگیرد و دو عدد دیگر به دو حالت در خانه‌ی بالایی جای می‌گیرند. حال از بین ۵ عدد دیگر که باید در ۵ دایره‌ی سمت راست جای بگیرند، کوچک‌ترین عدد در پایین‌تری خانه قرار می‌گیرد و می‌توان به ۴ طریق یکی از ۴ عدد باقی‌مانده را برای خانه‌ی تنها ردیف سوم انتخاب کرد. ۳ عدد باقی‌مانده هم شبیه بالا به دو حالت در سه دایره‌ی باقی‌مانده قرار می‌گیرند. (عدد کوچک‌تر در دایره‌ی پایین‌تر و دو عدد دیگر به دو حالت در دو دایره‌ی بالاتر) پس در کل این عمل به $۸۹۶ = ۵۶ \times ۲ \times ۴ \times ۲$ طریق امکان دارد.

گزینه‌ی [ج] صحیح است.

-۲۴

اولاً a و b هر دو صحیح هستند پس ۲^{b-a} هم صحیح است و لذا $b \geq a$. اگر $b = a$ ، باید $b^۲ = b + ۱$ که با توجه به تفاوت زوجیت دو طرف برای هیچ عدد صحیحی امکان ندارد. بنابراین $b - a \geq ۱$ و لذا ۲^{b-a} زوج است. حال با توجه به این زوجیت a و b یکسان خواهد بود و لذا $b - a = ۲k$ برای یک عدد طبیعی k .

$$b^۲ = a + ۲^{۲k} \Rightarrow a = (b - ۲^k)(b + ۲^k)$$

دقت کنید از آن‌جا که a نامنفی است، $b \geq ۲^k$. حال اگر $b \geq ۲^k$ ، آن‌گاه $a = (b + ۲^k)(b - ۲^k) \geq b > a$ که امکان ندارد، پس $b = ۲^k$ و بنابراین $a = ۰$. حال معادله به صورت $b^۲ = ۲^b$ در می‌آید و معادله $۲^{۲k} = ۲^{۲^k}$ از رابطه نتیجه می‌شود که $k = ۲^{k-1}$. اگر $k > ۳$ به سادگی با استقرار می‌توان نشان داد که $۲^{k-1} > k$ و $k = ۰, ۱$ جواب این معادله هستند که منجر به $b = ۲, ۴$ می‌شوند. پس این معادله دارای دو جواب $(۰, ۲)$ و $(۰, ۴)$ است.

۲۵- گزینهی [ب] صحیح است.

ادعا می‌کنیم نقطه‌ی P باید مرکز ارتفاعی این مثلثی باشد. به برهان خلف فرض کنید این چنین نباشد و برای مثال نقطه‌ی A روی خط عمود بر BC که از P می‌گذرد قرار نداشته باشد. دو نقطه روی خط عمود بر BC و گذرا از P وجود دارد که فاصله‌ی آنها تا P برابر ۷ است. این دو نقطه را A_1 و A_2 می‌نامیم. به علاوه فرض کنید l_1 و l_2 به ترتیب خط‌های موازی با BC گذرا از A_1 و A_2 باشند. به وضوح دایره‌ی به شعاع ۷ به مرکز P بین این دو خط قرار دارد و بنابراین دو خط l_1 و l_2 در دو طرف نقطه‌ی A که روی دایره است قرار دارند. بنابراین با توجه به این که BC هم با دو خط موازی است نقطه‌ی A بین یکی از این دو خط (مثلاً l_1) و خط BC قرار دارد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که فاصله‌ی BC با خط l_1 (ارتفاع نظیر A_1 از مثلث A_1BC) بیش‌تر از فاصله‌ی نقطه‌ی A با BC (ارتفاع نظیر A از مثلث ABC) است و چون قاعده‌ی هر دو مثلث BC است، مساحت مثلث اول بیش‌تر است که با بیش‌ترین بودن مساحت مثلث ABC تناقض دارد. بنابراین باید P روی ارتفاع نظیر A باشد. با استدلال مشابه P باید روی دو ارتفاع دیگر هم قرار داشته باشد و بنابراین مرکز ارتفاعی مثلث است.

حال اگر A' و C' به ترتیب پای ارتفاع‌های نظیر A و C باشند، می‌دانیم چهار ضلعی $AC'A'C$ محاطی است و لذا

$$PC' \cdot PC = PA' \cdot PA \Rightarrow \frac{PC'}{PA'} = \frac{PA}{PC} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

پس نسبت مورد نظر برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲۶- گزینهی [د] صحیح است.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = -\sin z \\ \cos x + \cos y = -\cos z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y = \sin^2 z \\ \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = \cos^2 z \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x - y) = \frac{-1}{2}$$

(ابتدا دو طرف رابطه‌ها را به توان دو رسانده و سپس دو رابطه را با هم جمع کرده‌ایم.)

حال از آن جا که $x, y \in (-\pi, \pi]$ نتیجه می‌گیریم $x - y \in (-2\pi, 2\pi]$ ضمناً $\cos(x - y) = \frac{-1}{2}$ و بنابراین

$$x - y \in \left\{ \frac{\pm 2\pi}{3}, \frac{\pm 4\pi}{3} \right\}$$

با استدلال کاملاً مشابه برای دیگر متغیرهای در می‌یابیم

$$y - z, z - x \in \left\{ \frac{\pm 2\pi}{3}, \frac{\pm 4\pi}{3} \right\}$$

از آن جا که $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$ با اندکی بررسی در می‌یابیم تنها حالات ممکن برای این سه عدد این است که دو تا از آنها برابر $\frac{2\pi}{3}$ و یکی $-\frac{4\pi}{3}$ و در حالت دیگر دو تا برابر $-\frac{2\pi}{3}$ و یکی برابر $\frac{4\pi}{3}$ باشد.

حال با اندکی آزمون و خطا و با توجه به رابطه‌ی سوم (که تاکنون استفاده نشده) می‌توان تمام جواب‌های مسأله را پیدا کرد اما خواسته‌ی مسأله مقدار $x^2 + y^2 + z^2$ است. بنابراین کاری لازم نیست. بلکه می‌توانیم با همین اطلاعات مقدار خواسته شده را محاسبه کنیم:

$$x + y + z = 0 \Rightarrow (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$$

از سوی دیگر $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 = \frac{8\pi^2}{3}$ و بنابراین

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8\pi^2}{9}$$

گزینه‌ی [ج] صحیح است.

-۲۷

با الگویی و بررسی مقادیر اولیه برای A_n می‌توان حدس زد که

$$A_n = n, n-1, n-3, n-4, \dots$$

یعنی اعداد کوچک‌تر از n مثل k که باقی‌مانده‌ی $n-k$ بر ۳ برابر دو باشد در A_n نیستند. این ادعا را می‌توان به کمک استقرا ثابت کرد. فرض

کنید حکم برای A_{m-1} و A_{m-2} برقرار باشد. در این صورت برای A_m

اگر $k < m$ و $(k \equiv 0 \pmod{3})$ ، در صورت $k \notin A_{m-1}$ ولی $k \in A_{m-2}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$k \in (A_{m-1} \Delta A_{m-2}) \cup m = A_m$$

اگر $k < m$ و $(k \equiv 1 \pmod{3})$ ، در صورت $k \in A_{m-1}$ ولی $k \notin A_{m-2}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$k \in (A_{m-1} \Delta A_{m-2}) \cup m = A_m$$

اگر $k < m$ و $(k \equiv 2 \pmod{3})$ ، در صورت $k \in A_{m-1}$ و ضمناً $k \in A_{m-2}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$k \in (A_{m-1} \Delta A_{m-2}) \cup m = A_m$$

اگر $k=m$ به وضوح طبق تعریف $k \in (A_{m-1} \Delta A_{m-2}) \cup m = A_m$.

پس حکم به طور کامل ثابت می‌شود. تنها باید اعداد ابتدایی را به عنوان پایه‌ی استقرا بررسی کرد.

حال برای $n=100$ ، تنها $100-71=29$ دارای باقی‌مانده‌ی ۲ در تقسیم به ۳ است و بنابراین تنها ۷۱ در A_{100} ظاهر نمی‌شود.

گزینه‌ی [ب] صحیح است.

-۲۸

باتری‌ها را از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. ابتدا جفت‌های ۱، ۲ و ۴، ۵ را امتحان می‌کنیم اگر سالم بودند که چراغ‌قوه روشن شده است و

به هدف خود رسیده‌ایم. اگر نه پس قطعاً باتری شماره ۳ سالم است و ضمناً چون از بین هر کدام از این جفت‌ها حتماً یکی خراب بوده و فقط ۲

باتری خراب داریم در هر جفت یک باتری خراب و یک باتری سالم است. در نهایت اگر جفت ۱، ۳ و ۲، ۳ را امتحان کنیم در یکی از این

دو امتحان چراغ‌قوه روشن می‌شود (چون یکی از ۱ و ۲ حتماً سالم است). پس در مجموع با چهار بار امتحان حتماً می‌توان چراغ‌قوه را روشن

کرد.

ضمناً ادعا می‌کنیم که با سه بار امتحان لزوماً چراغ‌قوه روشن نمی‌شود. زیرا دقت کنید که حتماً باتری‌ای یافت می‌شود که در حداقل دو

امتحان در چراغ‌قوه قرار داده شده باشد. (در غیر این صورت باید حداقل شش باتری داشته باشیم). فرض کنید این باتری مشترک در امتحان

های اول و دوم آمده باشد. در این صورت اگر این باتری مشترک و یکی از باتری‌های امتحان سوم خراب باشند، چراغ‌قوه روشن نمی‌شود.

گزینه‌ی [ج] صحیح است.

-۲۹

رأس مثلث را A می‌نامیم از A عمودی بر محور رسم می‌کنیم که چون ضلع قاعده و محور موازی‌اند این خط بر قاعده نیز عمود است و آن

را نصف می‌کند (مثلث متساوی‌الساقین است) پس می‌توان این گونه تصور کرد که حجم مورد نظر از یک استوانه که ارتفاع آن ۶ و شعاع قاعده

ی آن برابر $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ است تشکیل شده که از آن دو مخروط به ارتفاع ۳ و شعاع برابر شعاع استوانه بیرون آورده شده است. حال

حجم استوانه برابر $96\pi = 4^2\pi \times 6$ و حجم هر مخروط برابر $16\pi = \frac{1}{3} \times 4^2\pi \times 3$ بنابراین حجم شکل حاصل برابر است با

$$96\pi - 2 \times 16\pi = 64\pi$$

گزینه‌ی [الف] صحیح است.

-۳۰

دقت کنید که این مهره به هر تعداد دلخواهی حرکت می‌کند ولی تعداد خانه‌هایی که از آن‌ها می‌گذرد محدود است، پس زمانی که از خانه‌ای که قبلاً از آن گذشته عبور می‌کند. حال خانه‌ای که مهره بعد از n امین حرکتش در آن قرار می‌گیرد را A_n می‌نامیم. توضیحات بالا نشان می‌دهد می‌توان دو عدد طبیعی $k < l$ یافت که $A_k = A_l$. از آن جا که می‌توان حرکت مهره را در جهت عکس انجام داد (۳۰ خانه به سمت چپ و ۲۰ خانه به سمت پایین حرکت کرد). اگر $A_k = A_l$ باید $A_{k-1} = A_{l-1}$ و به همین ترتیب $A_{k-2} = A_{l-2}$ و ... تا این که $A_{k-1} = A_l$. یعنی زمانی می‌رسد که مهره از خانه‌ی اولیه عبور می‌کند. حال m را کوچک‌ترین عدد طبیعی بگیرد که $A_m = A_0$ در این صورت باید A_0, A_1, \dots, A_{m-1} متمایز باشند زیرا در غیر این صورت، مهره زودتر از مرحله m هم به خانه اولیه‌ی خود برگشته است که با فرض ما مبنی بر کوچک‌ترین بودن m تناقض دارد. حال دقت کنید که در این شرایط کل خانه‌هایی که مهره از آن‌ها عبور می‌کند همین m

خانه هستند. پس جواب مسئله $\frac{m}{140 \times 72}$ است و هدف باید پیدا کردن m باشد.

با توجه به نحوه‌ی حرکت مهره بعد از مرحله‌ی n ام مهره در خانه‌ای که قرار دارد که شماره‌ی ستونش باقی‌مانده‌ی تقسیم $30n + 1$ بر 140 و شماره‌ی سطرش باقی‌مانده‌ی تقسیم $20n + 1$ بر 72 باشد. بنابراین هدف ما یافتن کوچک‌ترین عدد طبیعی m است که (به پیمانه‌ی 140) $30m + 1 \equiv 1$ (به پیمانه‌ی 72) $20m + 1 \equiv 1$

$$\left. \begin{array}{l} 140 \mid 30m \Rightarrow 14 \mid 3m, (14, 3) = 1 \Rightarrow 14 \mid m \\ 72 \mid 20m \Rightarrow 18 \mid 5m, (18, 5) = 1 \Rightarrow 18 \mid m \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \times 7 \times 9 = [14, 18] \mid m$$

و چون m کم‌ترین مقدار طبیعی ممکن است $m = 2 \times 7 \times 9$ و بنابراین مهره به $\frac{1}{80} = \frac{2 \times 7 \times 9}{140 \times 72}$ از خانه‌های جدول

می‌تواند برسد.